التمرين الأول ☹☺☹(05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية :

$$\left(z^2+2z+4\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0.$$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط C,B,A و D التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}+i, z_B=\overline{z_A}, \text{z}_C=-1-\text{i}\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$.

أ) أكتب الأعداد المركبة z_C,z_B,z_A و z_D على الشكل الأسي .

ب) بين أن النقط C,B,A و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين عناصرها .

ج) بين أنّ : $\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$ ثم عين قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\right)$.

ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (AC) و (BD) ؟

3) نعتبر العدد المركب z_n الذي طويلته $\dfrac{1}{2^n}$ و $\dfrac{2n\pi}{3}$ عمدة له ، حيث n عدد طبيعي .

ونعرف العدد المركب L_n بـ : $L_n=z_D\times z_n$.

أ) أكتب كلا من العددين L_1,L_0 على الشكل الجبري .

ب) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_n=\left|L_n\right|$ من أجل كل عدد طبيعي n.

- بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- لتكن النقط $M_n,\dots,M_1,M_0$ صور الأعداد المركبة $L_n,\dots,L_1,L_0$ على الترتيب .

أحسب بدلالة n المجموع ، $S_n=\left\|\overrightarrow{OM_0}\right\|+\left\|\overrightarrow{OM_1}\right\|+\dots+\left\|\overrightarrow{OM_n}\right\|$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

التمرين الثاني ☹☺☺ (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ نعتبر النقط $A\ 1;2;3$ ، $B\ 0;1;4$ ، $C\ -1;-3;2$ و $D\ 4;-2;5$ و الشعاع $\vec{n}=2\vec{i}+a\vec{j}+b\vec{k}$ حيث b,a عددان حقيقيان .

1. أ) بين أن النقط C,B,A تعين مستويا ABC .

ب) عين العددين الحقيقيين b,a بحيث يكون الشعاع $\vec{n}$ ناظميا للمستوي ABC ثم عين معادلة ديكارتية للمستوي ABC .

2. ليكن المستقيم Δ ذي التمثيل الوسيطي: $\begin{cases}x=2-2t\\ y=-1+t; \quad t\in\mathbb{R}\\ z=4-t\end{cases}$

أ) بين أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم Δ وأن المستقيم Δ عمودي على المستوي ABC .

ب) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي ABC .

ج) أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي ABC .

د) بين أن النقطة H هي مركز ثقل المثلث ABC.

3. أدرس تقاطع المستقيم Δ مع المستوي $O,\vec{i},\vec{j}$.

التمرين الثالث ☹☹☹ (04 نقاط)

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5.

2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على العدد 5 حيث n عدد طبيعي.

3) بين أن العدد 131 أولي .

4) عين الأعداد الطبيعة n التي تحقق : $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ ab=5m\end{cases}$

حيث ، $d=PGCD(a,b)$ و $m=PPCM(a,b)$.

5) عين قيم n بحيث يكون ، $7<n<15$ ثم استنتج الثنائيات $(a;b)$.

التمرين الرابع☹ ☺ ☹ (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(1-2x)e^{2x}$

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.(وحدة الطول $2cm$)

I. 1) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) أحسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) حل المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

5) أحسب $f(1)$ ثم أرسم (C_f).

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :
$(E):f(x)=f(m)$

7) أ) عين العددين الحقيقيين b,a بحيث تكون الدالة F المعرفة بـ : $F(x)=(ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب بـ cm^2 و بدلالة λ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x=\frac{1}{2},y=0$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda<\frac{1}{2}$ ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}S(\lambda)$.

II. نسمي $f'=f^{(1)},f''=f^{(2)},f'''=f^{(3)},...,f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$.

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المنحني $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ الممثل للدالة $f^{(n)}$ حيث $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة n للدالة f يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة $M_n(x_n;y_n)$.

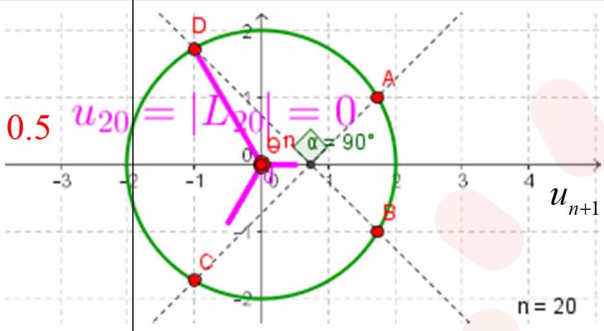
أ) أحسب بدلالة n كلا من x_n و y_n .

ب) بين أن المتتالية (x_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

ج) بين أن المتتالية (y_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$

العلامة	التصحيح
05 نقاط	**التمرين الأول** ☺☺☺
	1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$.
0.5	▪ **حل المعادلة** $(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$: $(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$ يكافئ $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ أو $z^2+2z+4=0$ ▪ حل المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ حساب المميز : $\Delta=(-2\sqrt{3})^2-4(1)(4)=12-16=-4=(2i)^2$ المعادلة تقبل حلين هما : $z_1=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i$, $z_2=\overline{z_1}=\sqrt{3}+\mathrm{i}$
0.5	▪ **حل المعادلة** $z^2+2z+4=0$ حساب المميز : $\Delta=(2)^2-4(1)(4)=4-16=-12=(2\sqrt{3}i)^2$ المعادلة تقبل حلين هما : $z'=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{2}=-1-i\sqrt{3}$, $z''=\overline{z'}=-1+i\sqrt{3}$
	▪ **مجموعة حلول المعادلة** $(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$: $S=\{\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i;-1-i\sqrt{3};-1+i\sqrt{3}\}$
	2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ **نعتبر النقط** A,B,C **و** D **التي لواحقها على الترتيب** $z_A=\sqrt{3}+i$, $z_B=\overline{z_A}$, $z_C=-1-i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$. **أ) أكتب الأعداد المركبة** z_A,z_B,z_C **و** z_D **على الشكل الأسي**
0.5	▪ **كتابة الأعداد** z_A,z_B,z_C **و** z_D **على الشكل الأسي:** ▪ لدينا : $z_A=\sqrt{3}+i$ ▪ حساب الطويلة : $\lvert z_A\rvert=\lvert\sqrt{3}+i\rvert=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ ▪ تعيين عمدة للعدد z_A : نضع $\theta=\arg(z_A)$ لدينا : $\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ أي $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$
	▪ ولدينا : $z_B=\overline{z_A}=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$
	▪ $z_C=-1-i\sqrt{3}$ حساب الطويلة : $\lvert z_C\rvert=\lvert -1-i\sqrt{3}\rvert=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

0.5	تعيين عمدة للعدد z_C : نضع : $\theta'=\arg(z_C)$ لدينا : $\begin{cases}\cos\theta'=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta'=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta\equiv\frac{4\pi}{3}[2\pi]$ إذن $z_C=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$
	▪ ولدينا : $z_D=\overline{z_C}=2e^{-i\frac{4\pi}{3}}$
	ب) بين أن النقط C,B,A و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين عناصرها .
0.25	▪ **تبيان أن النقط C,B,A و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) :** ▪ لدينا : $\lvert z_A\rvert=\lvert z_B\rvert=\lvert z_C\rvert=\lvert z_D\rvert=2$ أي $OA=OB=OC=OD=2$ **ومنه النقط C,B,A و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) ذات المركز O و نصف قطرها $r=2$**
	ج) بين أنَ : $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$ ثم عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD})$.
0.5	▪ **تبيان أن $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$ ثم تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD})$:** ▪ **لدينا:** $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=\frac{-1+i\sqrt{3}-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i+1+i\sqrt{3}}=\frac{-1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}=\frac{i^2(1+\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}$ أي $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=\frac{i\left(i(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\right)}{1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}=i\times\frac{1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}=i$ **إذن** $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$ ▪ **تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD})$:** $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD})=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$
	▪ **ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (AC) و (BD)؟**
0.25	▪ **الاستنتاج بالنسبة للمستقيمين (AC) و (BD):** $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD})=\frac{\pi}{2}$ يعني $(AC)\perp(BD)$
	3) نعتبر العدد المركب z_n الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2n\pi}{3}$ عمدة له ، حيث n عدد طبيعي . **ونعرف العدد المركب L_n بـ : $L_n=z_D\times z_n$.** **أ) أكتب كلا من العددين L_0,L_1 على الشكل الجبري .**
	▪ **كتابة كلا من العددين L_0,L_1 على الشكل الجبري :** لدينا : $L_0=z_D\times z_0=2e^{-i\frac{4\pi}{3}}\times\frac{1}{2^0}\times e^{i\frac{2\times0\times\pi}{3}}=2e^{-i\frac{4\pi}{3}}=-1+i\sqrt{3}$

0.5	$L_1 = z_D \times z_1 = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}} \times \frac{1}{2^1} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2 \times \frac{1}{2} \times e^{-i\frac{4\pi}{3}+i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ إذن $L_0 = -1 + i\sqrt{3}$ $L_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
	ب) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_n = \|L_n\|$ من أجل كل عدد طبيعي n. ▪ **بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .** ▪ **لتكن النقط $M_0, M_1, ..., M_n$ صور الأعداد المركبة $L_0, L_1, ..., L_n$ على الترتيب .** **أحسب بدلالة n المجموع ، $S_n = \left\|\overrightarrow{OM_0}\right\| + \left\|\overrightarrow{OM_1}\right\| + ... + \left\|\overrightarrow{OM_n}\right\|$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$**
0.5	▪ **تبيان أن المتتالية (u_n) هندسية :**  ▪ لدينا : $u_n = \|L_n\| = \|z_D \times z_n\| = \|z_D\| \times \|z_n\| = 2 \times \frac{1}{2^n}$ ▪ إذن : $u_{n+1} = 2 \times \frac{1}{2^{n+1}} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(2 \times \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}u_n$ ▪ أي $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ ومنه (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0 = \|L_0\| = \|-1 + i\sqrt{3}\| = 2$
0.5 0.25	▪ **حساب المجموع $S_n = \left\|\overrightarrow{OM_0}\right\| + \left\|\overrightarrow{OM_1}\right\| + ... + \left\|\overrightarrow{OM_n}\right\|$:** ▪ **لدينا :** $S_n = \left\|\overrightarrow{OM_0}\right\| + \left\|\overrightarrow{OM_1}\right\| + ... + \left\|\overrightarrow{OM_n}\right\| = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ $S_n = 2 \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 4 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $S_n = 4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ▪ **حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:** $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 4$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
04 نقاط	**☜ التمرين الثاني ☺☺☺**
	الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A(1;2;3), B(0;1;4), C(-1;-3;2)$ **و** $D(4;-2;5)$ **والشعاع** $\vec{n} = 2\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$ **حيث a, b عددان حقيقيان .** **1. أ) بين أن النقط A, B, C تعين مستويا (ABC) .**
$0.25 + 0.25$	▪ تبيان أن النقط A, B, C تعين مستويا : ▪ لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-5;-1)$

لدينا : $\frac{-1}{1} \neq \frac{-5}{-1} \neq \frac{-2}{-1}$ إذن :لا يوجد عدد حقيقي k بحيث يكون $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ ، ومنه النقط A, B, C ليست في استقامية فهي تعين مستويا.	0.25
ب)عين العددين الحقيقيين a,b بحيث يكون الشعاع $\vec{n}$ ناظميا للمستوي (ABC) ثم عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).	
▪ **تعيين العددين الحقيقيين a,b بحيث يكون الشعاع $\vec{n}$ ناظميا للمستوي (ABC):** ▪ لدينا : $\vec{n}(2;a;b)$ ناظميا للمستوي (ABC) يكافئ $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}2\times(-1)-a+b=0\\ 2(-2)-5a-b=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}-a+b-2=0...(1)\\ -5a-b-4=0...(2)\end{cases}$ ▪ بالجمع نجد : $-a+b-2-5a-b-4=0$ ومنه $-6a=6$ أي $a=-1$ ▪ من أجل $a=-1$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد : $b=1$ أي $\vec{n}(2;-1;1)$ ناظمي للمستوي (ABC)	0.5
▪ **تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):** ▪ معادلة (ABC) من الشكل $2x-y+z+d=0$ ▪ تعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة $A(1;2;3)$ نجد : $2(1)-2+3+d=0$ ومنه $d=-3$ معادلة للمستوي (ABC): $2x-y+z-3=0$	0.5
.2 ليكن المستقيم (Δ)ذي التمثيل الوسيطي: $\begin{cases}x=2-2t\\ y=-1+t; \quad (t\in\mathbb{R})\\ z=4-t\end{cases}$ أ) **بين أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ)وأن المستقيم (Δ)عمودي على المستوي (ABC).**	
▪ **تبيان أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ):** ▪ **من أجل** $(x;y;z)=(4;-2;5)$ بالتعويض في الجملة السابقة نجد : $\begin{cases}4=2-2t\\ -2=-1+t\\ 5=4-t\end{cases}$ **ومنه** $\begin{cases}2t=-2\\ t=-1\\ t=-1\end{cases}$ أي $\begin{cases}t=-1\\ t=-1\\ t=-1\end{cases}$ ومنه $D\in(\Delta)$	0.25

Nafouz

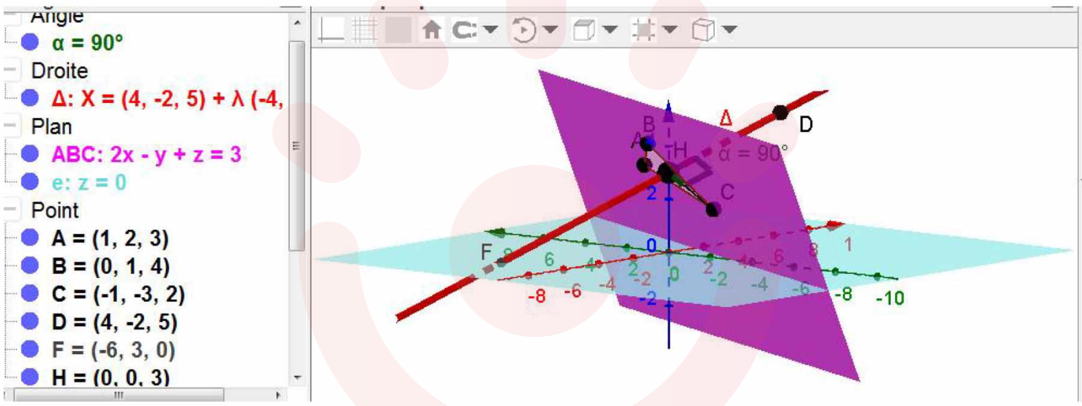
0.25	▪ تبيان أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC): ▪ لدينا : $\vec{n}(2;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ▪ ولدينا : $\vec{u}(-2;1;-1)$ شعاع توجيه (Δ) ▪ نلاحظ أن : $\vec{n}=-\vec{u}$ ومنه $\vec{n}\parallel\vec{u}$ أي $(\Delta)\perp(ABC)$
	ب) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC):
0.5	▪ تعيين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC): ▪ إحداثيات النقطة H هي حل للجملة : $\begin{cases}x=2-2t\\y=-1+t\\z=4-t\\2x-y+z-3=0\end{cases}$ ▪ أي $2(2-2t)-(-1+t)+(4-t)-3=0$ ومنه $-6t+6=0$ وبالتالي $t=1$ إذن: $H(0;0;3)$
	ج) أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).
0.5	▪ حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC): ▪ لدينا : $d(D,(ABC))=DH=\sqrt{(-4)^2+(2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ ▪ أو بطريقة أخرى : $d(D,(ABC))=\dfrac{\lvert 2(4)-(-2)+5-3\rvert}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\dfrac{\lvert 12\rvert}{\sqrt{6}}=\dfrac{12\sqrt{6}}{6}=2\sqrt{6}$ $d(D,(ABC))=2\sqrt{6}$
	د) بين أن النقطة H هي مركز ثقل المثلث ABC.
0.25	▪ تبيان أن النقطة H هي مركز ثقل المثلث ABC: ▪ H هي مركز ثقل المثلث ABC يعني $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ لدينا : $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ ومنه النقطة H هي مركز ثقل المثلث ABC
	3) أدرس تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$.
0.25 0.25	▪ دراسة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$: ▪ لدينا معادلة للمستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي $z=0$ ومنه شعاع ناظمي له هو $\vec{k}(0;0;1)$ ▪ ولدينا شعاع توجيه للمستقيم (Δ) هو $\vec{u}(-2;1;-1)$. ▪ إذن : $\vec{k}.\vec{u}=0\times(-2)+0\times1+1\times(-1)=-1\neq0$ ومنه (Δ) لا يوازي $(O,\vec{i},\vec{j})$ ▪ أي (Δ) يقطع $(O,\vec{i},\vec{j})$ في نقطة F .

▪ إحداثيات النقطة F هي حل للجملة :
$$\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t \\ z=4-t \\ z=0 \end{cases}$$

أي $4-t=0$ ومنه $t=4$

▪ من أجل $t=4$ بالتعويض في جملة التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد :
$$\begin{cases} x=-6 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases}$$ ومنه $F(-6;3;0)$

0.25



☜ التمرين الثالث ☹☺☹ — 04نقاط

1) **أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5.**

▪ **دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5:**

▪ لدينا :

$2^0\equiv1[5]$ $\quad 2^1\equiv2[5]$ $\quad 2^2\equiv4[5]$ $\quad 2^3\equiv3[5]$ $\quad 2^4\equiv1[5]$

إذن بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5 تشكل متتالية دورية دورها $p=4$.

من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة العدد 2^n على 5	1	2	4	3

0.5 + 0.5

2) **عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على العدد 5 حيث n عدد طبيعي.**

▪ **تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على 5:**

▪ لدينا : $2017^{4n+3}\equiv2^{4n+3}[5]$ أي $2017^{4n+3}\equiv3[5]$

▪ ولدينا : $2016^{8n}\equiv1^{8n}[5]$ أي $2016^{8n}\equiv1[5]$

▪ و $2014^{2n+1}\equiv4^{2n+1}[5]$ أي $2014^{2n+1}\equiv(2^2)^{2n+1}[5]$ ومنه $2014^{2n+1}\equiv2^{4n+2}[5]$

وبالتالي $2014^{2n+1}\equiv4[5]$

▪ إذن $2017^{4n+3}-2\times2016^{8n}+2014^{2n+1}\equiv3-2\times1+4[5]$

ومنه $2017^{4n+3}-2\times2016^{8n}+2014^{2n+1}\equiv0[5]$

0.75

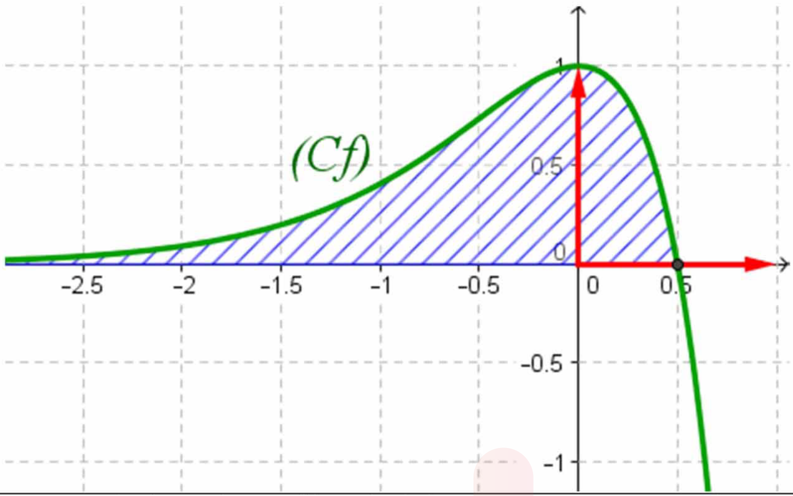
	أي باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على 5 هو 0
	3) بين أن العدد 131 أولي .
0.5	▪ تبيان أن العدد 131 أولي : لدينا : $\sqrt{131}=11.45$ ▪ العدد 131 لا يقبل القسمة على أي عدد من الاعداد الأولية الأصغر من أوتساوي 11 وهي $\{2;3;5;7;11\}$ $131\equiv 10[11],131\equiv 5[7],131\equiv 1[5],131\equiv 2[3],131\equiv 1[2]$ ومنه العدد 131 أولي .
	4) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ ab=5m\end{cases}$ حيث ، $d=PGCD(a,b)$ و $m=PPCM(a,b)$.
0.75	▪ تعيين الأعداد n التي تحقق : $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ ab=5m\end{cases}$ ▪ لدينا $ab=5m$ ولدينا $ab=md$ ومنه $d=5$ ▪ نضع : $a=5a'$ و $b=5b'$ مع $a'\wedge b'=1$ (a' أولي مع b') ▪ إذن $ab=5m$ يعني $5a'\times 5b'=5m$ أي $m=5a'b'$ وبالتالي : $3m+7d=2^n-48$ معناه $3\times 5a'b'+7\times 5=2^n-48$ أي $5(3a'b'+7)=2^n-48$ $3a'b'+7$ طبيعي يعني $2^n-48\equiv 0[5]$ ومنه $2^n-3\equiv 0[5]$ أي $2^n\equiv 3[5]$ وبالتالي : $n=4k+3$ مع $k\in\mathbb{N}$
	5) عين قيم n بحيث يكون ، $7<n<15$ ثم استنتج الثنائيات $(a;b)$.
0.5	▪ تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون ، $7<n<15$: ▪ لدينا : $7<n<15$ معناه $7<4k+3<15$ أي $4<4k<12$ ▪ وبالتالي : $1<k<3$ إذن $k=2$ ومنه $n=11$
0.5	▪ استنتاج الثنائيات $(a;b)$: ▪ من أجل $n=11$ لدينا : $5(3a'b'+7)=2^{11}-48$ ومنه $5(3a'b'+7)=2000$ أي $3a'b'+7=400$ ومنه $a'b'=131$ وبالتالي مجموعة الثنائيات $(a';b')$ $\{(131;1),(1;131)\}$ ومنه مجموعة الثنائيات $(a;b)$ $\{(655;5),(5;655)\}$
(07 نقاط)	التمرين الرابع ☹☺☺
	نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(1-2x)e^{2x}$ نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس

Nafouz

I. 1) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.	
▪ **حساب النهايات عند $-\infty$ وعند $+\infty$:** ▪ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-2x)e^{2x}=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-2xe^{2x}\right)=0$ لان $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0,\ \lim_{x\to-\infty} 2xe^{2x}=0$ ▪ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-2x)e^{2x}=-\infty$ لان $\lim_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty$	$0.25+0.25$
2) أحسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.	
▪ **حساب المشتقة :** ▪ $f'(x)=-2e^{2x}+(1-2x)\times 2e^{2x}=(-2+2-4x)e^{2x}=-4xe^{2x}$ $f'(x)=-4xe^{2x}$ من أجل كل عدد حقيقي x	0.25
▪ **استنتاج اتجاه تغير الدالة f :** ▪ **جدول اشارة المشتقة :** شارة $f'(x)$ من اشارة $-x$ x: $-\infty$ … 0 … $+\infty$ $-x$: $+$ 0 $-$ $f'(x)$: $+$ 0 $-$ ▪ الدالة f **متزايدة على المجال** $]-\infty;0]$ ومتناقصة على المجال $[0;+\infty[$.	0.25
3) شكل جدول تغيرات الدالة f.	
▪ **جدول تغيرات الدالة f :** x: $-\infty$ … 0 … $+\infty$ $f'(x)$: $+$ 0 $-$ $f(x)$: 0 ↗ 1 ↘ $-\infty$	0.5
4) حل المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.	
▪ **حل المعادلة $f(x)=0$:** ▪ $f(x)=0$ يكافئ $(1-2x)e^{2x}=0$ يكافئ $1-2x=0$ لان $e^{2x}\neq 0$ يكافئ $x=\dfrac{1}{2}$ ▪ **استنتاج نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل:** $(C_f)\cap(x'x)=\left\{\left(\dfrac{1}{2};0\right)\right\}$	0.25
5) أحسب $f(1)$ ثم أرسم (C_f).	
▪ **حساب $f(1)$:** ▪ $f(1)=(1-2(1))e^{2\times1}=-e^2=-7.39$	

Nafouz

▪ **الرسم :**



$0.25+0.5$

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): f(x)=f(m)$

▪ **مناقشة حلول المعادلة $(E): f(x)=f(m)$:**

▪ حلول المعادلة $f(x)=f(m)$ بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=f(m)$ الموازي لحامل محور الفواصل $(x'x)$.

تغير قيم $f(m)$ حسب قيم m

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(m)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

▪ **المناقشة :**

▪ إذا كان $f(m)\in]-\infty;0[$ أي $m\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة تقبل حلا موجبا تماما.

▪ إذا كان $f(m)=0$ أي $m=\frac{1}{2}$ المعادلة تقبل حلا موجبا $x=\frac{1}{2}$.

▪ إذا كان $f(m)\in]0;1[$ أي $m\in]-\infty;0[\cup\left]0;\frac{1}{2}\right[$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة.

▪ إذا كان $f(m)=1$ أي $m=0$ المعادلة تقبل حلا معدوما مضاعفا.

01

7) أ) عين العددين الحقيقيين b,a بحيث تكون الدالة F المعرفة بـ : $F(x)=(ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

▪ **تعيين العددين الحقيقيين b,a:**

- F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ يعني $F'(x)=f(x)$

أي $ae^{2x}+(ax+b)\times 2e^{2x}=(1-2x)e^{2x}$ ومنه $(2ax+a+2b)e^{2x}=(1-2x)e^{2x}$

بالمطابقة نجد $\begin{cases}2a=-2\\ a+2b=1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$

أي $F(x)=(-x+1)e^{2x}$

0.5

ب) أحسب بـ cm^2 و بدلالة λ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x=\frac{1}{2}, y=0$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda<\frac{1}{2}$ ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)$.

- **حساب $S(\lambda)$:**

f دالة مستمرة وموجبة على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ وبالتالي :

$$S(\lambda)=\int_{\lambda}^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\left[F(x)\right]_{\lambda}^{\frac{1}{2}}=\left[(-x+1)e^{2x}\right]_{\lambda}^{\frac{1}{2}}=\left(-\frac{1}{2}+1\right)e-(-\lambda+1)e^{2\lambda}$$

أي $S(\lambda)=\left(\frac{1}{2}e+\lambda e^{2\lambda}-e^{2\lambda}\right)\times us=\left(\frac{1}{2}e+\lambda e^{2\lambda}-e^{2\lambda}\right)\times 4cm^2$

ومنه $S(\lambda)=\left(2e+4\lambda e^{2\lambda}-4e^{2\lambda}\right)cm^2$

0.5

- **حساب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)$:**

$\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\left(2e+4\lambda e^{2\lambda}-4e^{2\lambda}\right)=(2e)cm^2$ لان

$\lim\limits_{\lambda\to-\infty} 4\lambda e^{2\lambda}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2\lambda}=0$

0.25

II. نسمي $f'=f^{(1)}, f''=f^{(2)}, f'''=f^{(3)},\dots,f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$.

- **البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$**

- نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1) من أجل $n=1$ لدينا :

$$f^{(1)}(x)=2^1(1-1-2x)e^{2x}=-4xe^{2x}=f'(x)$$

ومنه $P(1)$ صحيحة .

2) نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$

ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن

$$f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}(1-(n+1)-2x)e^{2x}=2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$$

- لدينا : $f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'=2^n\times\left[-2e^{2x}+(1-n-2x)\times 2e^{2x}\right]$

ومنه $f^{(n+1)}(x)=2^n(-2+2-2n-4x)e^{2x}=2^n\times 2(-n-2x)e^{2x}$

أي : $f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

3) حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

0.75

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المنحني $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ الممثل للدالة $f^{(n)}$ حيث $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة n للدالة f يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة $M_n(x_n;y_n)$.

أ) أحسب بدلالة n كلا من x_n و y_n .

▪ **حساب** x_n **و** y_n **بدلالة** n**:** - $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ **يقبل مماسا يوازي** $(x'x)$ يعني $f^{(n+1)}(x)=0$ أي $2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}=0$ ومنه $-n-2x=0$ وبالتالي $x=-\frac{1}{2}n$ أي $x_n=-\frac{1}{2}n$ من أجل $x=-\frac{1}{2}n$ لدينا : $y_n=f^{(n)}\left(-\frac{1}{2}n\right)=2^n\left(1-n-2\left(-\frac{1}{2}n\right)\right)e^{2\left(-\frac{1}{2}n\right)}=2^n e^{-n}=\left(2e^{-1}\right)^n$ أي $y_n=\left(2e^{-1}\right)^n$	$0.25+0.25$
ب) بين أن المتتالية (x_n) **حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.	
▪ **تبيان أن** (x_n) **متتالية حسابية :** - **لدينا :** $x_{n+1}-x_n=-\frac{1}{2}(n+1)-\left(-\frac{1}{2}n\right)=-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n=-\frac{1}{2}$ ومنه (x_n) متتالية حسابية أساسها $r=-\frac{1}{2}$ وحدها الأول $x_0=0$. - **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}n\right)=-\infty$	0.5
ج) بين أن المتتالية (y_n) **هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب** $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$	
▪ **تبيان أن المتتالية** (y_n) **هندسية :** - لدينا : $y_n=\left(2e^{-1}\right)^n$ ومنه $y_{n+1}=\left(2e^{-1}\right)^{n+1}=2e^{-1}\times\left(2e^{-1}\right)^n=2e^{-1}\times y_n$ ومنه (y_n) هندسية أساسها $q=2e^{-1}$ وحدها الأول $y_0=1$. - **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2e^{-1}\right)^n=0$ لان $-1<2e^{-1}<1$	0.5